Galileo Transformaties en Quantum Mechanica

Erik Springelkamp

3 april 2004

1 Euclidische Ruimte

1.1 Notatie

We gebruiken de bra-ket notatie van Dirac

Ket vector $|\,\psi\!>$ is een vector in de Hilbertruimte

Bra vector $<\!\psi\,|$ is een lineaire functionaal op de Hilbertruimte

De Hermitisch geconjugeerde van operator A is $\mathrm{A}^\dagger$

1.2 Translatie

1.2.1 1-Dimensionaal

We gebruiken een coordinaat x, en deze vormt een volledig coordinatenstelsel.

Een translatie $\mathrm{T}(a)$ over een afstand a, $x' = x - a$, zal leiden tot een transformatie van de operator x en de toestand $|\,\psi\!>$:

$$\mathrm{x}' = \mathrm{x} - \mathrm{a} \tag{1}$$

$$|\,\psi'\!> \;= \mathrm{T}\,|\,\psi\!> \tag{2}$$

Vergelijking (2) betekent dat ook de toestand transformeert bij een translatie.

De ruimte is Homogeen dwz alle waarnemingen zijn invariant onder translaties. Als alle matrixelementen hetzelfde blijven dan is hieraan voldaan:

$$<\!\phi'\,|\,\psi'\!> \;=\; <\!\phi\,|\,\psi\!> \tag{3}$$

$$<\!\phi'\,|\mathrm{x}'|\,\psi'\!> \;=\; <\!\phi\,|\mathrm{x}|\,\psi\!> \tag{4}$$

Uit vergelijking (3) volgt:

$$<\!\phi\,|\mathrm{T}^\dagger\mathrm{T}|\,\psi\!> \;=\; <\!\phi\,|\,\psi\!> \tag{5}$$

$$\mathrm{T}^{\dagger}\mathrm{T} = 1 \tag{6}$$

T is dus Unitair.

Uit vergelijking (4) volgt:

$$<\phi\,|\mathrm{T}^{\dagger}(\mathrm{x}-\mathrm{a})\mathrm{T}|\,\psi> \;=\; <\phi\,|\mathrm{x}|\,\psi> \tag{7}$$

$$\mathrm{T}^{\dagger}\mathrm{x}\mathrm{T} = \mathrm{x} + \mathrm{a} \tag{8}$$

Als we een infinitesimale translatie δx beschouwen dan kunnen we schrijven:

$$\mathrm{T}(\delta x) = 1 - i\mathrm{D}.\delta x \tag{9}$$

waarbij uit vergelijking (6) volgt dat

$$\mathrm{D}^{\dagger} = \mathrm{D} \tag{10}$$

Voor de translatie vinden we dan voor vergelijking (8)

$$i(\mathrm{Dx} - \mathrm{xD}) = 1 \tag{11}$$

Om uit de infinitesimale tranlatie een eindige translatie $\mathrm{T}(a)$ te krijgen moeten we in vergelijking (9) δx integreren tot a met als resultaat:

$$\mathrm{T}(a) = e^{-i\mathrm{D}a} \tag{12}$$

De operator $-i\partial/\partial x$ voldoet aan vergelijking (11) voor D.
Het verschil tussen $-i\partial/\partial x$ en D commuteert met x en moet dus een functie van x zijn. Hiermee is bewezen dat voor een nog vrij te kiezen $f(x)$:

$$\mathrm{D} = \; - i\partial/\partial x + f(x) \tag{13}$$

Voor een golffunctie $\phi(x)$ geldt nu:

$$\phi(x) =< x\,|\,\phi >=< x'\,|\,\phi' >= \phi'(x') = \phi'(x-a) \tag{14}$$

1.2.2 3-Dimensionaal

We gebruiken nu 3 coordinaten x, y en z, ook wel x_1, x_2 en x_3 te noemen, oftewel x_i, of als vector $\vec{x}$ aan te duiden.

Een translatie $\mathrm{T}(\vec{a})$ wordt verder volkomen analoog aan het 1-dimensionale geval gedefinieerd:

$$\mathrm{x}_\mathrm{i}' = \mathrm{x}_\mathrm{i} - \mathrm{a}_\mathrm{i} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{15}$$

De generator van translaties D wordt:

$$\mathrm{D}_i = -i\partial/\partial x_i + f_i(x_j) \tag{16}$$

We weten ook de cummutatierelaties

$$-i(\mathrm{x}_i\mathrm{D}_j - \mathrm{D}_j\mathrm{x}_i) = \delta_{ij} \tag{17}$$

1.2.3 Impuls

Tot nu toe hebben we alleen naar de plaats gekeken. In de dynamica van een 'klassiek' deeltje zijn er twee belangrijke grootheden, plaats en impuls.

Impuls heeft het transformatiekarakter van een translatie, en impuls is invariant onder translaties.

Daarmee is de translatiegenerator D een kandidaat voor de operator impuls. Hiermee kunnen we aan een golffunctie een impuls toekennen, zelfs zonder het begrip tijd in aanmerking te nemen.

Om de physische dimensies goed te krijgen gebruiken we de constante $\hbar$, zodat:

$$\mathrm{p}_i = \hbar\mathrm{D}_i = -i\hbar\partial/\partial x_i + f_i(x_j) = -i\hbar\partial_i + f_i(x_j) \tag{18}$$

Omdat we van een homogene ruimte uitgaan zonder interacties zullen we voorlopig f nul kiezen.

$$\mathrm{p}_i = -i\hbar\partial_i \tag{19}$$

De impuls is dus invariant onder translaties

$$\mathrm{p}_i\mathrm{T}(a_j) - \mathrm{T}(a_j)\mathrm{p}_i = 0 \tag{20}$$

Verder hebben we de cummutatierelaties

$$\frac{1}{i\hbar}(\mathrm{x}_i\mathrm{p}_j - \mathrm{p}_j\mathrm{x}_i) = \delta_{ij} \tag{21}$$

1.3 Galileo Transformatie

1.3.1 Impuls Translatie

Er zijn ook transformaties waarbij de impuls wel verandert. Allereerst natuurlijk de rotaties, die we hier nu niet behandelen. Een Galileo Transformatie verschuift alle impulsen met dezelfde waarde. We kunnen hiermee dus een stelsel kiezen waarin een bepaalde impuls naar nul transformeert. (Dit is in wezen de Tweede Wet van Newton).

Analoog aan een translatie van de positie is dit een translatie van de impuls $\mathrm{U}(b_i)$ ($\mathrm{U}^\dagger = \mathrm{U}^{-1}$ als bij T):

$$\mathrm{p'}_i = \mathrm{p}_i - b_i \tag{22}$$

$$|\,\psi'> \ = \mathrm{U}(b_i)|\,\psi> \tag{23}$$

$$<\phi'\,|\mathrm{p'}_i|\,\psi'> \ = \ <\phi\,|\mathrm{p}_i|\,\psi> \tag{24}$$

$$\mathrm{U}^\dagger \mathrm{p'}_i \mathrm{U} = \mathrm{p}_i \tag{25}$$

We onderzoeken weer hoe zo'n transformatie er uit zou moeten zien door middel van een infinitesimale impulstranlatie δb_i:

$$\mathrm{U}(\delta v_i) = 1 - i\mathrm{I}_i.\delta b_i \tag{26}$$

vergelijking (25) wordt dan:

$$i(\mathrm{I}_j \mathrm{p}_i - \mathrm{p}_i \mathrm{I}_j)\delta b_j = \delta b_i \tag{27}$$

$$i(\mathrm{I}_j \mathrm{p}_i - \mathrm{p}_i \mathrm{I}_j) = \delta_{ij} \tag{28}$$

Vergelijken we dit met vergelijking (21) dan volgt voor I:

$$\mathrm{I}_i = \ -\hbar \mathrm{x}_i + g_i(p) \tag{29}$$

1.3.2 De Tijd Coordinaat

Om tot een dynamica van deeltjes te komen zullen we ook de tijdcoordinaat moeten introduceren. De tijd t wordt als onafhankelijke coordinaat opgevoerd naast de ruimte coordinaten $x_i \quad i = 1, 2, 3$.

We introduceren de tijdcoordinaat door middel van de Galileo Transformatie.

Bij een Galileotransformatie verschuift het getransformeerde stelsel met een snelheid $\vec{v}$ ten opzichte van het ruststelsel. Bovendien worden bij een Galileotransformatie alle impulsen met een vaste waarde verschoven. De Galileotransformatie $\mathrm{G}(v_i)$ wordt dus gedefinieerd door:

$$\mathrm{x'}_i = \mathrm{x}_i - v_i.t \tag{30}$$

$$\mathrm{p'}_i = \mathrm{p}_i - m.v_i \tag{31}$$

De nieuw geintroduceerde constante m hangt samen met de gekozen eenheden van x, t en met de constante $\hbar$. We noemen het de *massa*.

1.3.3 De Galileo Transformatie

Bekijken we weer een infinitesimale transformatie $\mathrm{G}(\delta v_i)$:

$$\mathrm{G}(\delta v_i) = 1 - \frac{i}{\hbar}\mathrm{I}_i.\delta v_i \tag{32}$$

Door vergelijking (29) en vergelijking (18) te combineren vinden we voor I_i:

$$\mathrm{I}_i = \mathrm{p}_i.t - m.\mathrm{x}_i \tag{33}$$

En voor een eindige Galileotransformatie vinden we:

$$\mathrm{G}(v_i) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathrm{p}_i t - m\mathrm{x}_i).v_i} \tag{34}$$