

Gallileo Transformaties en Quantum Mechanica

Erik Springelkamp

14 maart 2004

1 Euclidische Ruimte

1.1 Notatie

We gebruiken de bra-ket notatie van Dirac

Ket vector $|\psi\rangle$ is een vector in de Hilbertruimte

Bra vector $\langle\psi|$ is een lineaire functionaal op de Hilbertruimte

De Hermitisch geconjugeerde van operator A is A^\dagger

1.2 Translatie

1.2.1 1-Dimensionaal

We gebruiken een coördinaat x , en deze vormt een volledig coördinatenstelsel.

Een translatie $T(a)$ over een afstand a , $x' = x - a$, zal leiden tot een transformatie van de operator x en de toestand $|\psi\rangle$:

$$x' = x - a \tag{1}$$

$$|\psi'\rangle = T |\psi\rangle \tag{2}$$

Vergelijking (2) betekent dat ook de toestand transformeert bij een translatie.

De ruimte is Homogeen dwz alle waarnemingen zijn invariant onder translaties. Als alle matrixelementen hetzelfde blijven dan is hieraan voldaan:

$$\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \tag{3}$$

$$\langle\phi'|x'|\psi'\rangle = \langle\phi|x|\psi\rangle \tag{4}$$

Uit vergelijking (3) volgt:

$$\langle\phi|T^\dagger T|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \tag{5}$$

$$T^\dagger T = 1 \quad (6)$$

T is dus Unitair.

Uit vergelijking (4) volgt:

$$\langle \phi | T^\dagger (x - a) T | \psi \rangle = \langle \phi | x | \psi \rangle \quad (7)$$

$$T^\dagger x T = x + a \quad (8)$$

Als we een infinitesimale translatie δx beschouwen dan kunnen we schrijven:

$$T(\delta x) = 1 - iD \cdot \delta x \quad (9)$$

waarbij uit vergelijking (6) volgt dat

$$D^\dagger = D \quad (10)$$

Voor de translatie vinden we dan voor vergelijking (8)

$$i(Dx - xD) = 1 \quad (11)$$

Om uit de infinitesimale translatie een eindige translatie $T(a)$ te krijgen moeten we in vergelijking (9) δx integreren tot a met als resultaat:

$$T(a) = e^{-iDa} \quad (12)$$

De operator $-i\partial/\partial x$ voldoet aan vergelijking (11) voor D.

Het verschil tussen $-i\partial/\partial x$ en D commuteert met x en moet dus een functie van x zijn. Hiermee is bewezen dat voor een nog vrij te kiezen $f(x)$:

$$D = -i\partial/\partial x + f(x) \quad (13)$$

Voor een golffunctie $\phi(x)$ geldt nu:

$$\phi(x) = \langle x | \phi \rangle = \langle x' | \phi' \rangle = \phi'(x') = \phi'(x - a) \quad (14)$$

1.2.2 3-Dimensionaal

We gebruiken nu 3 coördinaten x , y en z , ook wel x_1 , x_2 en x_3 te noemen, oftewel x_i , of als vector \vec{x} aan te duiden.

Een translatie $T(\vec{a})$ wordt verder volkomen analoog aan het 1-dimensionale geval gedefinieerd:

$$x'_i = x_i - a_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

De generator van translaties D wordt:

$$D_i = -i\partial/\partial x_i + f_i(x_j) \quad (16)$$

We weten ook de cummutatierelaties

$$-i(x_i D_j - D_j x_i) = \delta_{ij} \quad (17)$$

1.2.3 Impuls

Tot nu toe hebben we alleen naar de plaats gekeken. In de dynamica van een 'klassiek' deeltje zijn er twee belangrijke grootheden, plaats en impuls.

Impuls heeft het transformatiekarakter van een translatie, en impuls is invariant onder translaties.

Daarmee is de translatiegenerator D een kandidaat voor de operator impuls. Hiermee kunnen we aan een golf functie een impuls toekennen, zelfs zonder het begrip tijd in aanmerking te nemen.

Om de fysische dimensies goed te krijgen gebruiken we de constante \hbar , zodat:

$$p_i = \hbar D_i = -i\hbar\partial/\partial x_i + f_i(x_j) = -i\hbar\partial_i + f_i(x_j) \quad (18)$$

Omdat we van een homogene ruimte uitgaan zonder interacties zullen we voorlopig f nul kiezen.

$$p_i = -i\hbar\partial_i \quad (19)$$

De impuls is dus invariant onder translaties

$$p_i T(a_j) - T(a_j) p_i = 0 \quad (20)$$

Verder hebben we de cummutatierelaties

$$\frac{1}{i\hbar} (x_i p_j - p_j x_i) = \delta_{ij} \quad (21)$$

1.3 Gallileo Transformatie

1.3.1 Impuls Translatie

Er zijn ook transformaties waarbij de impuls wel verandert. Allereerst natuurlijk de rotaties, die we hier nu niet behandelen. Een Gallileo Transformatie verschuift alle impulsen met dezelfde waarde. We kunnen hiermee dus een stelsel kiezen waarin

een bepaalde impuls naar nul transformeert. (Dit is in wezen de Tweede Wet van Newton).

Analoog aan een translatie van de positie is dit een translatie van de impuls $U(b_i)$ ($U^\dagger = U^{-1}$ als bij T):

$$p'_i = p_i - b_i \quad (22)$$

$$|\psi'\rangle = U(b_i)|\psi\rangle \quad (23)$$

$$\langle\phi'|p'_i|\psi'\rangle = \langle\phi|p_i|\psi\rangle \quad (24)$$

$$U^\dagger p'_i U = p_i \quad (25)$$

We onderzoeken weer hoe zo'n transformatie er uit zou moeten zien door middel van een infinitesimale impulstranlatie δb_i :

$$U(\delta v_i) = 1 - iI_i \cdot \delta b_i \quad (26)$$

vergelijking (25) wordt dan:

$$i(I_j p_i - p_i I_j) \delta b_j = \delta b_i \quad (27)$$

$$i(I_j p_i - p_i I_j) = \delta_{ij} \quad (28)$$

Vergelijken we dit met vergelijking (21) dan volgt voor I:

$$I_i = -\hbar x_i + g_i(p) \quad (29)$$

1.3.2 De Tijd Coördinaat

Om tot een dynamica van deeltjes te komen zullen we ook de tijdcoördinaat moeten introduceren. De tijd t wordt als onafhankelijke coördinaat opgevoerd naast de ruimte coördinaten x_i $i = 1, 2, 3$.

We introduceren de tijdcoördinaat door middel van de Gallileo Transformatie.

Bij een Gallileotransformatie verschuift het getransformeerde stelsel met een snelheid \vec{v} ten opzichte van het ruststelsel. Bovendien worden bij een Gallileotransformatie alle impulsen met een vaste waarde verschoven. De Gallileotransformatie $G(v_i)$ wordt dus gedefinieerd door:

$$x'_i = x_i - v_i \cdot t \quad (30)$$

$$p'_i = p_i - m \cdot v_i \quad (31)$$

De nieuw geïntroduceerde constante m hangt samen met de gekozen eenheden van x , t en met de constante \hbar . We noemen het de *massa*.

1.3.3 De Gallileo Transformatie

Bekijken we weer een infinitesimale transformatie $G(\delta v_i)$:

$$G(\delta v_i) = 1 - \frac{i}{\hbar} \mathbf{I}_i \cdot \delta v_i \quad (32)$$

Door vergelijking (29) en vergelijking (18) te combineren vinden we voor \mathbf{I}_i :

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{p}_i \cdot t + m \cdot \mathbf{x}_i + f_i(t) \quad (33)$$

En voor een eindige Gallileotransformatie vinden we:

$$G(v_i) = e^{-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_i t + m \mathbf{x}_i + f_i(t)) \delta v_i} \quad (34)$$